

海冰动力学中本构模型研究的若干进展*

季顺迎† 岳前进

大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023

摘要 从 20 世纪 70 年代, 人们在不同尺度下建立了一系列的海冰动力学本构模型用于海冰数值模拟和预测. 将目前应用的海冰动力学本构模型分为弹塑性、黏塑性、各向异性和颗粒流体动力学中的黏弹塑性模型 4 类, 并分别讨论了各类模型的特点和适用范围. 尤其对在极区及副极区大、中尺度下广泛应用的黏塑性及其改进的本构模型进行了深入地分析. 最后得出: 在大、中尺度下建立海冰动力学的黏弹塑性本构模型是提高海冰动力学计算精度的有效途径; 将小尺度下采用黏弹塑性本构模型的海冰颗粒流体动力学的计算时效进一步改进后, 可在大、中尺度下对海冰的重叠、堆积特性进行模拟; 进一步开展海冰动力学的尺度效应研究, 进行海冰本构模型的实验验证, 并建立不同尺度模型间的相互联系也应是海冰动力学本构模型研究的重要内容.

关键词 海冰动力学, 本构模型, 弹塑性, 黏塑性, 各向异性

1 引言

海冰动力学方程的建立和完善、海冰与大气、海洋的相互作用及其参数化、动力学方程的计算方法和本构模型是目前海冰动力学研究中的主要问题, 其中表征冰间相互作用的本构模型一直是提高海冰动力学模拟精度的关键内容. 在海冰动力学数值模拟中, 海冰漂移的动力学方程一般是按牛顿定律来描述的, 即^[1~3]

$$M \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} = -Mf\mathbf{K} \times \mathbf{V}_i + \boldsymbol{\tau}_a + \boldsymbol{\tau}_w - Mg\nabla\xi_w + \nabla(h\boldsymbol{\sigma}) \quad (1)$$

式中, 单位面积海冰质量 $M = \rho_i h$, 其中平均冰厚 $h = Ah_i$, 这里 ρ_i , h_i 和 A 分别为海冰的密度、厚度和密集度; \mathbf{V}_i 为海冰速度矢量; $f = 2\omega_e \sin\varphi$ 为科氏参数, 其中 ω_e 为地转角速度, φ 为地理纬度; \mathbf{K} 为垂直于海面的单位矢量; $\boldsymbol{\tau}_a$ 和 $\boldsymbol{\tau}_w$ 分别为风和流对海冰的拖曳力; g 为重力加速度; ξ_w 为瞬时海面高度; $\boldsymbol{\sigma}$ 为海冰应力矢量. 由于海冰在不同条件下的力学行为有很大差别, 并对海冰的漂移、重叠和堆积过程有显著的影响, 因此描述其应力-应变关系

的本构方程在海冰动力学的数值模拟中有着重要的作用.

为研究自然条件下海冰的动力学行为, 人们对极区及副极区海冰动力过程中的应变(率)、应力和强度等力学参数, 以及厚度、漂移速度和冰块尺寸等物理特征等进行了系统的浮标测量、雷达和卫星遥感监测^[4~11]. 基于这些观测资料, 人们发现海冰在不同的尺度下表现出不同的动力学特征, 并建议海冰动力学应分别在 100 km, 10 km 和 1 km, 即大、中、小 3 种不同的尺度下进行研究^[12,13]. 在大尺度下, 海冰一般被视为各向同性的连续介质, 并主要考虑海冰在辐合辐散过程的流变特性; 中尺度下的海冰更多地表现出因断裂、重叠和堆积现象而导致的各向异性力学行为; 而在小尺度下, 冰块间的碰撞、破碎和堆积等作用过程则通过离散介质方法进行研究.

从 20 世纪 70 年代开始, 在海冰数值模拟和预测中建立了线黏性^[14]、弹塑性^[15,16]和黏塑性^[1,17]等一系列海冰动力学本构模型. 特别是 Hibler 的黏塑性模型不断发展和完善, 在极区及副极区的大、中尺度海冰数值模拟和预测中得到了广泛的应用,

收稿日期: 2003-03-28, 修回日期: 2005-03-02

* 国家自然科学基金(40206004)资助项目

† E-mail: jisy@dlut.edu.cn

并取得了理想的计算结果^[2,18~20]。以上模型是建立在二维连续介质力学基础上的,尚不能处理小尺度下(或冰块尺度下)海冰断裂、重叠、堆积的方位,以及波浪作用下冰块碰撞、破碎等海冰动力学问题。为此,从80年代中期开始,应用颗粒流体动力学理论,建立并发展了基于黏塑性本构模型的海冰碰撞流变学^[21~24]。在此基础上,Hopkins^[25~28]采用黏弹塑性本构模型处理冰块间的相互作用,并明确地提出了用于海冰动力学的颗粒流体动力学方法。最近,Coon,Pritchard和Hibler分别发展了各向异性体模型,对冰脊和冰隙的方向和尺度进行了初步研究^[29~32]。

海冰动力学本构模型一般是在现场观测和卫星遥感资料的基础上建立的,并通过数值模拟的灵敏度分析进行验证,而且不同尺度下的本构模型均有其各自的适用性。虽然有关海冰力学行为的实验工作在现场和室内均进行了大量的研究,但针对海冰动力学的实验研究还相对较少,能应用于改进海冰动力学本构模型的实验结果更是有限。近年来,海冰动力学的尺度效应已引起了人们的很大关注,并希望通过室内实验进行不同尺度下海冰本构模型的完善和参数的确定^[12,13,35~38]。

考虑目前海冰本构方程的特点和应用范围,本文将其大体分为4类,即弹塑性、黏塑性及其改进模型、各向异性体和颗粒流体动力学中的黏弹塑性模型。对以上4类海冰动力学本构模型进行分析,进而对不同尺度下海冰本构模型的进一步发展和完善进行讨论,以提高海冰动力学模拟的精度和时效。

2 弹塑性海冰动力学本构模型

在北极海冰动力学联合实验(AIDJEX)中,通过对海冰应力、应变的现场测量,Coon等人^[15]和Pritchard^[16]将海冰在大、中尺度下视为二维连续介质,建立了海冰动力学的弹塑性本构模型。该模型将海冰简化为平面应力问题,考虑海冰在塑性屈服前的弹性力学行为,并采用Mohr-Coulomb屈服准则和相关联的正交流动法则。它可适用于空间尺度(5~100)km,时间尺度(1~24)h的大、中尺度海冰动力学数值模拟^[15,16]。在塑性屈服前的弹性力学行为表述为^[15,16,36]

$$\sigma = K D_{e1} I + 2G D'_e \quad (2)$$

式中 σ 为应力; K 和 G 分别为海冰体积和剪切弹性模量。 $D_{e1} = \text{tr} D_e$ 为膨胀应变; $D'_e = D_e - D_{e1} I / 2$ 为弹性应变偏量,其中 D_e 是弹性应变。

该弹塑性模型采用了Mohr-Coulomb屈服准则,屈服函数如图1所示^[31]。该屈服函数表述为

$$\begin{aligned} \sigma_2(1 + \sin \beta) &= \sigma_1(1 - \sin \beta) + 2b \cos \beta \\ \sigma_1(1 + \sin \beta) &= \sigma_2(1 - \sin \beta) + 2b \cos \beta \\ \sigma_1 = \sigma_T &= 2b \cos \beta / (1 + \sin \beta) \\ \sigma_2 = \sigma_T \\ \sigma_1 = -\sigma_C &= -2b \cos \beta / (1 - \sin \beta) \\ \sigma_2 = -\sigma_C \end{aligned} \quad (3)$$

式中 σ_1 和 σ_2 分别为第1和第2主应力; σ_C 和 σ_T 分别为海冰压缩和拉伸强度; β 为内摩擦角, b 为粘结力。

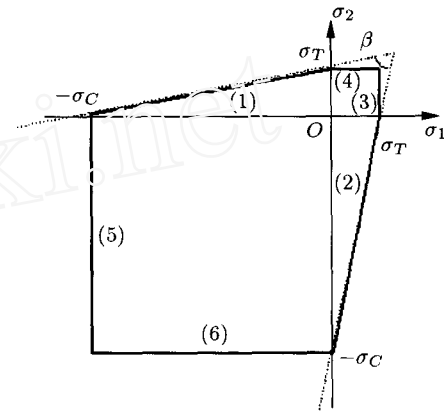


图1 弹塑性海冰动力学本构模型的Mohr-Coulomb准则^[31]

Coon等人在1993年~1994年冬季在Beaufort海和Alaska北部对大面积海冰在漂移过程中的应力变化过程进行了长时间连续现场测量,结果表明:海冰的压缩和拉伸强度一般分别为250kN/m²和50kN/m²,并由此确定出海冰内摩擦角 $\beta = 42^\circ$,粘结力 $b = 56 \text{ kN/m}^2$ ^[31]。

当海冰应力进入塑性状态后,其总应变为弹性应变和塑性应变之和,其增量形式写作

$$dD = dD_e + dD_p \quad (4)$$

式中 dD_e 和 dD_p 分别为弹性应变和塑性应变增量,其中 D 为海冰的总应变率矢量。根据塑性力学增量流变理论,海冰的塑性应力增量可写作

$$d\sigma = C^{el}(dD - dD_p) \quad (5)$$

式中 C^{el} 为材料的弹性模量矩阵。当材料处于弹性阶段时,有 $dD_p = 0$,而在塑性阶段的塑性应变或应

变率可由 Drucker 公式来确定. 根据 Missies 塑性位势流动理论, 塑性增量与塑性势函数 Ψ 正交, 即正交流动法则, 其可写作

$$dD_p = d\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} \quad (6)$$

式中 $d\lambda$ 为塑性标量因子, 可由塑性应变的一致性条件进行确定. Ψ 为塑性势函数. 如果该塑性势函数取为屈服函数 $f(\sigma)$, 则称作与屈服函数相关联的流动法则, 否则称作非关联的流动法则. 在 AIDJEX 海冰动力学的项目中建立的弹塑性本构模型采用了相关联的正交流动法则^[16,36].

在弹塑性海冰动力学本构模型中, 将海冰简化为平面应力问题. 该模型因不考虑海冰应变率的影响, 不能处理海冰在大中尺度下的应力松弛和蠕变现象. 尽管该弹塑性海冰动力学本构模型在 20 世纪 70 年代初就在极区海冰现场测量的基础上建立起来, 也能较好地反应大、中尺度下海冰的弹塑性力学行为, 但由于其在处理海冰塑性流动时的复杂性, 在实际海冰动力学模拟中没有得到较广的应用.

3 黏塑性及其改进的海冰动力学本构模型

黏塑性海冰本构模型是为模拟极区海冰对全球气候的影响而建立的, 目前已广泛地应用于极区及副极区的大、中尺度海冰数值模拟和预测中^[1,12,37~39]. 该模型考虑海冰在大、中尺度下因断裂、重叠和堆积而引起的显著流变特性, 进而在计算中忽略海冰弹性变形的影响, 将海冰应力仅视为应变率的函数. 该模型在大、中尺度下的中、长期海冰数值模拟和预测中有很强的计算时效和稳定性, 能够很好地描述海冰在大应变率条件下的塑性流动行为. 在不同海域的海冰动力学研究中, 对 Hibler 的黏塑性模型的屈服准则^[19,20]、海冰发生塑性屈服时的压力^[2]和屈服前的弹性力学行为^[18,40]进行了一系列的改进.

3.1 黏塑性本构模型

为提高海冰数值模拟的计算效率, 并针对海冰在较大时空尺度下的流变特征, 忽略海冰的弹性力学行为, Hibler^[1]建立了黏塑性海冰动力学本构模型. 海冰进入塑性前按线黏性计算, 进入塑性后采用正交流动法则, 并取用椭圆屈服函数, 如图 2 所示. 该椭圆屈服函数可表述为^[1]

$$F(\sigma_1, \sigma_2, P) = (\sigma_1 + \sigma_2 + P)^2 + e^2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - P^2 \quad (7)$$

式中 e 为海冰屈服曲线的椭圆率, 一般取为 2.0; P 为海冰发生塑性流动时的压力, 其为海冰密集度的函数, 有^[1]

$$P = P^* \exp[-C(1 - A)] \quad (8)$$

式中 A 为海冰密集度, C 是经验常数, 一般取 $C = 20.0$. P^* 为海冰在密集度为 1.0 时发生塑性流动时的压力, 它在不同海域取用的数值有很大差异. 例如, Hibler^[1]和 Lepparanta 等人^[12]在极区及冰缘区的海冰数值模拟中分别取其为 $2.75 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ 和 $1.0 \times 10^4 \text{ N/m}^2$; 吴辉碛等^[3]在渤海海冰数值模拟中取其为 $0.5 \times 10^4 \text{ N/m}^2$; Zhang 等^[35]分别选用 $2.5 \times 10^4 \text{ N/m}^2$, $1.5 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ 和 $0.5 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ 等不同数值研究了它对 Baltic 海域冰速分布的影响.

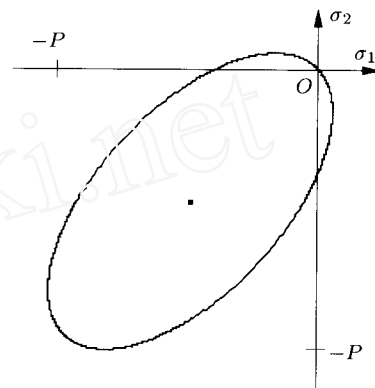


图 2 黏塑性海冰本构模型中的椭圆屈服函数

在黏塑性海冰动力学本构模型中, 将海冰在水平方向上简化为平面应力问题, 其二维应力张量按下式计算^[1]

$$\sigma_{ij} = 2\eta \dot{\epsilon}_{ij} + [(\zeta - \eta)\dot{\epsilon}_{kk} - P/2]\delta_{ij} \quad (9)$$

式中 σ_{ij} 和 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 分别为二维应力和应变率张量; δ_{ij} 为 Kronecker 算子; ζ 和 η 分别为非线性体积和切变黏性系数, 且 $\eta = \zeta/e^2$. 为了使 ζ 和 η 在零应变率处得到定义, 将海冰按线黏性流体处理, 即对 ζ 的最大值加以限制, 有^[1]

$$\zeta = \min\left(\frac{P}{2\Delta}, \zeta_{\max}\right) \quad (10)$$

式中 $\Delta = \sqrt{\dot{\epsilon}_I^2 + \dot{\epsilon}_{II}^2}/e^2$, 其中主应变率

$$\dot{\epsilon}_I = \dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy}$$

$$\dot{\epsilon}_{II} = \sqrt{(\dot{\epsilon}_{xx} - \dot{\epsilon}_{yy})^2 + 4\dot{\epsilon}_{xy}^2}$$

ζ_{\max} 为海冰在小应变率下发生线黏性流动时的最大体积黏性系数. 一般取 ζ_{\max} 为 $2.5 \times 10^8 P$, $1.0 \times 10^6 P$ 等^[1,30].

由式(9),式(10)可见,当应变速率较小时, ζ 和 η 均为常数,即 $\zeta = \zeta_{\max}$, $\eta = \zeta_{\max}/e^2$,此时黏塑性海冰本构模型简化为线黏性模型;当应变速率较大时,海冰进入塑性流动状态,黏性系数 η 和 ζ 为应变率张量的非线性函数,依此计算的海冰主应力位于椭圆屈服函数之上.当海冰发生塑性流动时,将式(10)代入式(9),可得海冰的塑性应变率张量为^[18]

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{2\eta} \sigma_{ij} + \frac{\eta - \zeta}{4\eta\zeta} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{P}{4\zeta} \delta_{ij} \quad (11)$$

在以上 Hibler 黏塑性本构模型中,主要考虑海冰在大、中尺度下的流变特征,并根据主应变率大小来判断海冰发生线黏性形变或黏塑性流动.该模型忽略了海冰的弹性变形,这在很大程度上简化了计算过程,提高了大、中尺度下中、长期

海冰数值模拟的计算效率.但这又限制了海冰在小尺度下动力学计算中的适用性.为此,季顺迎等^[41]在 Hilber 黏塑性本构模型的基础上,考虑海冰在小应变条件下的弹性力学行为,建立了黏弹塑性海冰动力学本构模型,并应用于渤海海冰动力学数值模拟^[41].

在1993年~1994年的SIMI项目海冰研究中,对 Beaufort 海大面积海冰(或称作冰原)的应力和应变进行了长时间的现场测量^[6,7].他们从1993年12月6日开始实测的冰原边缘处的应力和应变在25d内的变化曲线如图3所示.从中可以看出海冰应力与应变率的密切关系.另外,不同冰原位置的实测结果还表明:在冰原中部,海冰应力一般在25kPa左右;在冰原边缘,海冰应力较大,可达100kPa.这是

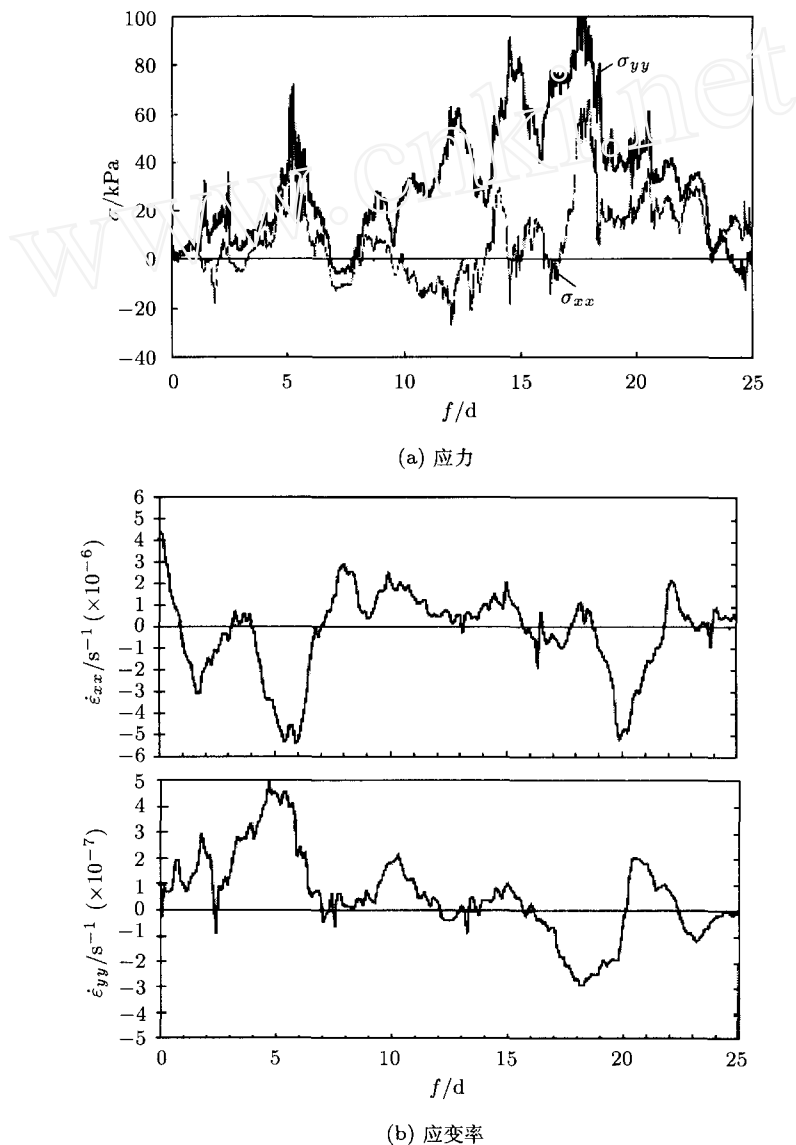


图3 1993年冬季在 Beaufort 海冰原边缘处实测的海冰应力及应变率^[5]

由于冰原内部应变率要明显低于冰缘处的应变率,并进一步证实了在大尺度海冰流变学中,应变率对海冰应力的影响。

采用以上黏塑性海冰动力学本构模型, Hibler^[1]在 1979 年对北极海冰在有限差分计算网格为 100 km, 时间步长为 24 h 的大尺度条件下进行了热力 - 动力耦合模拟。另外, 在渤海海冰的数值模拟中, 吴辉碇等人^[3]将网格尺度缩小为 8.65 km × 11.11 km, 时间步长为 1 h 或 10 min, 进行了中尺度下的海冰动力过程计算, 模拟的海冰厚度、密集度等结果与卫星遥感资料吻合^[3]。近年来, Lindsay 等人^[9,42], Zhang 等人^[37], Wang 等人^[43]和 Wang^[44]均采用黏塑性本构模型对极区及亚极区海冰的动力演化过程进行了数值计算, 其网格尺度在 10 km 到 100 km 之间。由此可见, Hilber 的黏塑性本构模型在大、中尺度下对海冰的动力过程有很强的适用性。这主要是因为海冰在大、中尺度下因重叠和堆积而导致的塑性变形要远远大于其弹性变形, 进而表现出很强的塑性流变行为。

Hibler 的黏塑性海冰本构理论能够很好地反应出海冰抗压能力明显强于抗拉能力的特征, 并可有效地进行海冰动力学的非线性数值模拟。它不会出现采用弹塑性本构模型进行海冰数值模拟时因弹性波问题而引起的麻烦, 并且它在欧拉差分网格中便于数值计算, 非常适用于长期季节性海冰的数值模拟^[3,17]。

在采用黏塑性本构模型进行海冰动力学数值模拟时, 人们对其屈服函数、压力项等进行了如下的改进, 以提高计算时效或使其更加符合自然条件下海冰的动力学特征。

3.2 黏塑性屈服函数的改进

3.2.1 平截的椭圆屈服函数

在自然条件下, 由于冰间水或冰隙的存在, 大尺度下的海冰一般不能承受拉应力。为此, Hibler 等人^[45]对原黏塑性模型中的椭圆屈服函数进行了平截(如图 4 所示), 以避免拉应力的产生。该方法对黏塑性模型在辐散过程中的拉伸和剪切应力计算进行了简化, 计算结果也与实际情况相吻合。在 Baltic 海的海冰数值模拟中也采用了该平截的椭圆屈服函数, 并取得了较好的计算结果^[35]。

3.2.2 空化流体模型

在长期全球气候研究中, Flato 等人^[20]基于 Hibler 的黏塑性模型建立了一个简化的空化流体模

型, 该模型不考虑海冰的辐散过程和剪切应力, 仅保留辐合过程, 其主应力状态仅为一条直线, 如图 4 所示。对于长期气候研究, 该模型具有计算简单, 计算精度也满足要求, 且计算中忽略剪切应力可以使海冰运动时平稳穿越障碍等优点^[39]。

3.2.3 Mohr-Coulomb 屈服准则

考虑海冰剪切破坏的性质, Ip 等人^[19]将土力学中的 Mohr-Coulomb 屈服准则引入到黏塑性海冰动力学本构模型中。模拟中的体积和剪切黏性系数仍为应变率的函数, 其改进为

$$\zeta = \min \left[\zeta_{\max}, \frac{P}{|\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2|} \right] \quad (12)$$

$$\eta = \min \left[\eta_{\max}, \zeta \tan \beta \frac{|\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2|}{|\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2|} \right] \quad (13)$$

式中, 最大体积和切变黏性系数 ζ_{\max} 和 η_{\max} 为经验系数; $\dot{\epsilon}_1$ 和 $\dot{\epsilon}_2$ 为主应变率。由式 (12), 式 (13) 可以看出, 当应变率较大时, 海冰的体积和切变黏性系数为应变率的函数; 而在小应变率条件下, 海冰的黏性系数取为其最大值 ζ_{\max} 和 η_{\max} , 此时海冰本构方程由黏塑性转变为线黏性模型。

在该 Mohr-Coulomb 屈服准则中, 考虑在大尺度下海冰的离散分布特性, 取粘聚力 $C = 0$, 经数值试验后取内摩擦角 $\beta = 25^\circ$ ^[31]。该 Mohr-Coulomb 屈服曲线外切于原椭圆屈服函数(如图 4 所示), 且采用非正交的塑性流动法则。该屈服准则在中尺度海冰动力学以及河冰动力学中得到了较广泛的应用^[19,35,46~48]

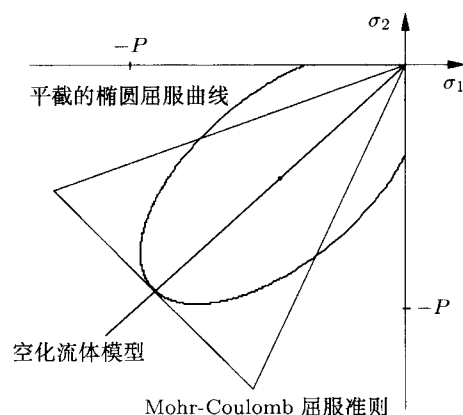


图 4 改进的海冰动力学黏塑性本构模型中的屈服函数

3.3 海冰压力项的改进

3.3.1 考虑应变率的压力项

在传统的黏塑性模型中, 冰内压力 P 是密集度的函数。当应变率较大时, 海冰发生塑性流变, 主应

力处于椭圆屈服曲线上; 当在小应变率时, 海冰应力按线黏性计算, 主应力位于椭圆中心周围; 当海冰速度场均匀或静止时, 应变率为零, 此时主应力位于椭圆中心, 如图 5(a) 所示。

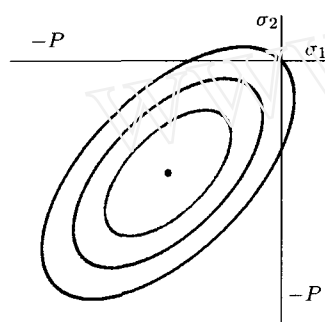
在自然条件下, 当海冰不受外界强迫而静止或均匀运动时 (即应变率为零), 不存在冰内应力。这与原黏塑性模型计算的应力处于椭圆中心处相矛盾。为此 Hibler^[29] 将海冰压力项改为应变率的函数, 即

$$P = 2\Delta\zeta \quad (14)$$

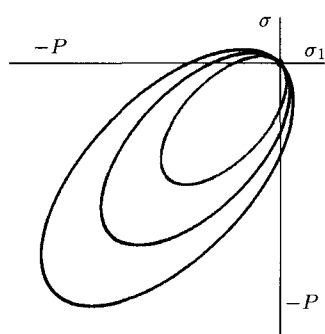
这里

$$\zeta = \min\left(\frac{P^*}{2\Delta}, \zeta_{\max}\right) \quad (15)$$

当海冰发生塑性流动后, 冰内压力为定值 P^* 。当应变率较小时, 黏性系数 $\zeta = \zeta_{\max}$, 这时压力 $P \leq P^*$, 海冰应力状态位于椭圆曲线内, 并随应变率的减小而向原点逼近。当海冰应变率为零时应力为零, 如图 5(b) 所示。



(a) 冰内压力项为常数



(b) 冰内压力项为应变率的函数

图 5 黏塑性海冰动力学本构模型中小应变率下应力状态^[29]

3.3.2 考虑冰厚和冰速辐合、辐散过程的压力项

在传统的黏塑性中, 海冰强度一般设定为海冰密集度的函数。Shen 等人^[2,46,47] 考虑海冰重力和浮力的影响, 并应用土力学中主动和被动土压力的极限分析理论, 建立了河冰和海冰在辐合和辐散时的压力

计算公式, 即

$$P_{p,a} = \tan^2\left(\frac{\pi \pm \beta}{4}\right) \left(1 - \frac{\rho_i}{\rho_w}\right) \frac{\rho_i g h_i}{2} \left(\frac{A}{A_{\max}}\right)^j \quad (16)$$

式中 ρ_i 和 ρ_w 分别为海冰和海水的密度; h_i 为海冰厚度。这里的“+”和“-”分别表示海冰在辐合和辐散运动时的被动和主动冰内压力 P_p 和 P_a 。内摩擦角一般取 $\beta = 46^\circ$, 经验系数 $j = 15$ 。 A_{\max} 为最大密集度, 在海冰中取为 100%, 在河冰中取 60%。上式还表明, 海冰的压力项是与海冰厚度相关的变量。它最早应用于冰坝的形成机理研究中, 并得到了现场观测和室内实验的验证, 被理想地用于河冰冰塞和海冰堆积过程的数值模拟中^[43,47]。

3.4 海冰碰撞流变学中的黏塑性模型

为研究海冰在波浪作用下的碰撞, Shen 等人^[21,22] 将颗粒流体动力学理论应用到海冰动力学中, 并建立了二维的冰坝碰撞流变学模型。在最初的二维海冰碰撞流变学中, 海冰被离散为大小相同的圆盖, 并在运动中相互碰撞、摩擦。冰块间的相互作用采用 Hibler 的黏塑性本构模型, 其中的黏性系数和海冰强度是冰块大小、厚度和回弹系数等的函数, 并分别写作^[22]

$$\eta = \frac{\gamma(1+e')v'}{3\pi D}, \quad \zeta = 3\eta \quad (17)$$

$$P = \frac{\gamma\sqrt{2}(1+e')}{\pi^2} \left(\frac{v'}{D}\right)^2 \quad (18)$$

这里

$$\gamma = \frac{\rho_i D^2 t_i}{4} \frac{A^{3/2}}{A_0^{1/2} - A^{1/2}} \quad (19)$$

式中 ζ 和 η 分别为体积和剪切黏性系数; e' ($0 < e' < 1$) 为回弹系数, 其被定义为 v_i/v_0 , 这里 v_i, v_0 是冰块碰撞前和碰撞后的法向相对速度; v' 为冰块运动的波动分量; D 为冰块直径, A_0 为海冰的质量密度。

采用以上黏塑性海冰本构模型, 对一定区域内的海冰运动进行 Monte Carlo 数值模拟, 经统计后得到的海冰塑性屈服曲线和不同应力状态的应变率矢量如图 6 所示, 这里 $A = 0.8$, $e = 0.1$ 。图 6 中无量纲主应力定义为

$$S_{1,2} = \frac{\sigma_{1,2}}{\rho_i D^2 t_i (\dot{\epsilon}_1^2 + \dot{\epsilon}_2^2)} \quad (20)$$

式中 $\sigma_{1,2}$ 和 $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2$ 分别为第 1 和第 2 主应力和主应变率。

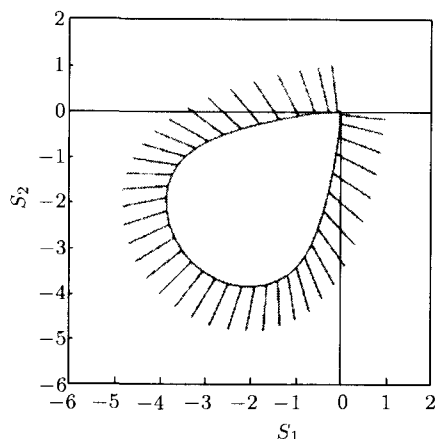


图6 通过海冰碰撞流变学模拟的屈服曲线及应变率矢量 [22]

在二维海冰碰撞流变学中,各冰块被定义为尺寸相同的圆盘,用于模拟碎冰区海冰在波浪作用下的动力过程。Lu^[23], Lepparanta^[24] 和 Loset^[49] 采用大小不同的圆盘对海冰与波浪的相互作用以及碎冰区动力特征做了进一步的研究。

3.5 基于 Hibler 黏塑性模型的弹 - 黏塑性模型

在采用黏塑性本构模型时,海冰动力学方程是一个二阶抛物线方程。如果采用显式差分计算,当网格尺度为 100 km 时,时间步长应在 1 s 数量级;如果采用半隐半显式的超松弛迭代法计算,可取较大的时间步长,但该计算方法需要较多的循环计算,并受网格尺度约束较大,不能适用于并行计算^[18,40]。为此 Hunke^[18,40] 在黏塑性模型的基础上发展了弹 - 黏塑性本构模型,这样海冰动力学方程转化为双曲线方程,可采用较大时间步长的显式差分计算,进而可用于海冰动力学的并行计算。

Hunke^[18] 考虑海冰变形中的弹性力学行为,并将其与 Hibler 黏塑性模型串联,得到如下形式的弹 - 黏塑性模型,即

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{2\eta} \sigma_{ij} + \frac{\eta - \zeta}{4\eta\zeta} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{P}{4\zeta} \delta_{ij} \quad (21)$$

式中 E 为海冰的弹性模量。为提高大尺度海冰动力学模拟的计算效率,并在满足一定计算精度的情况下,该模型中的弹性部分忽略了泊松比的影响,因此它不是严格意义上的弹性力学方程^[18,36]。另外,还可以看出,当弹性模量 $E \rightarrow \infty$ 时,式(21)可简化为黏塑性模型;而当黏性系数 $\zeta, \eta \rightarrow \infty$, 上式又可简化为弹性模型。

将式(21)代入海冰动力学方程式(1),可得到一个双曲线方程。在采用显示格式进行差分计算时,可选用较大的时间步长。另外,在小应变率下,黏塑性

模型中的线黏性模型又转化为黏弹性模型,可更合理地计算海冰在塑性屈服前的应力状态。在该弹 - 黏塑性模型中,海冰的弹性模量设为海冰厚度、网格尺度的函数,以保障计算的稳定性。因此,在 Hunke^[18] 的弹 - 黏塑性模型中,海冰弹性变形的引入更多的是数学上的处理,其次才是使其更加符合海冰动力学的力学过程。

在黏塑性模型基础上改进的弹 - 黏塑性模型已应用于极区大尺度海冰长期数值模拟中,计算精度与黏塑性模型相近,且计算效率较高^[50]。将北极分为 300×360 个计算网格,每个网格为 $1/6$ 经纬度(约 18 km),时间步长为 4 h, Hunke 和 Zhang^[51] 采用以上黏弹塑性本构模型进行了海冰动力学的并行计算,计算效率和精度均优于原黏塑性模型。另外,考虑海冰在塑性屈服前的黏弹性力学行为,在 Hibler 黏塑性模型的基础上发展了黏弹 - 塑性海冰动力学本构模型,并初步应用到了渤海海冰动力学数值模拟中^[41]。

尽管传统的黏塑性及其改进模型已广泛地应用于不同尺度下的海冰动力学的数值模拟,但其仍然需要进一步完善以提高不同海冰类型和海冰条件下的计算精度。一方面,由于黏塑性海冰动力学模型仅将应力视为应变率的函数,不能计算海冰的弹性力学行为。Hunke^[18] 建立的弹 - 黏塑性本构模型主要用于提高海冰数值模拟的计算效率,而不能从力学上很好地解决弹性应变对海冰应力的影响。另一方面,尽管在黏塑性海冰模型中采用了椭圆或 Mohr-Coulomb 屈服准则,但判断海冰是否进入塑性状态的依据不是屈服函数,而是由经验确定的最小应变率或最大黏性系数,并导致应力计算的不稳定性。Ukita 等人^[52] 也指出对黏塑性海冰模型的屈服准则进一步研究是必要的,尤其是海冰在由黏性向黏塑性的转变过程中。当在黏塑性本构模型中采用正交的流动法则时,在屈服面处将会出现应力的不连续现象,这需要采用非正交的流动法则进行解决^[36]。

4 海冰动力学各向异性本构模型

近年来,为模拟海冰断裂、重叠和堆积现象发生的尺度和方位, Coon 等人^[31]、Pritchard^[32] 和 Hibler 等人^[29,30] 分别建立了相应的各向异性模型,并进行了初步的算例研究。

4.1 海冰各向异性弹塑性本构模型

在北极海冰应力和应变现场测量基础上, Coon^[15] 和 Pritchard^[16] 建立了各向同性弹塑性海

冰动力学模型, 并可用于大、中尺度下海冰堆积、重叠、断裂等动力破坏现象(以上现象可统一简称为冰隙)的近似描述. 但为精确确定冰隙发生的方位和尺度, 他们在原弹塑性模型的基础上建立了各向异性弹塑性本构模型.

现场观测结果表明, 垂直于冰隙截面方向的正应力和剪切应力均很小, 而在平行于冰隙方向上仍然会保持一定的应力. 图 7 为 1994 年 2 月在北极海冰现场观测中得到冰隙形成过程中不同方向上的应力变化过程^[31].

在各向异性弹塑性本构模型中, 令垂直于冰隙发生方向的海冰应力为零, 而平行冰隙方向仍保持一定的应力. 为确定冰隙方位, 建立局部 ζ - η 坐标, 它与 x - y 坐标的夹角为 θ , 如图 8(a) 所示. 在该局部坐标系下的冰隙应力状态为 $(\sigma_{\xi\xi}, \sigma_{\eta\eta}, \sigma_{\xi\eta})$, 在垂直于冰隙

方向上有 $\sigma_{\eta\eta} = 0, \sigma_{\xi\eta} = 0$, 应力 $\sigma_{\xi\xi}$ 与 x - y 坐标下的应力分量有如下关系^[31]

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{\sigma_{\xi\xi}}{2}(1 - \cos 2\theta) \\ \sigma_{yy} &= \frac{\sigma_{\xi\xi}}{2}(1 + \cos 2\theta) \\ \sigma_{xy} &= -\frac{\sigma_{\xi\xi}}{2}\sin 2\theta\end{aligned}\quad (22)$$

Coon 等人^[31]指出冰隙的塑性屈服面可以是矩形、棱形或椭圆. 他采用了如图 8(b) 所示的矩形屈服函数和正交塑性流动法则. 图 8(b) 中的 4 个屈服面分别代表了冰隙的扩张、闭合、主动和被动剪切等 4 种不同的破坏形式. 将冰隙的各向异性模型同各向同性弹塑性模型相结合, 在进行大尺度海冰动力学数值模拟时, 可对局部冰隙形成和发展进行精确地分析.

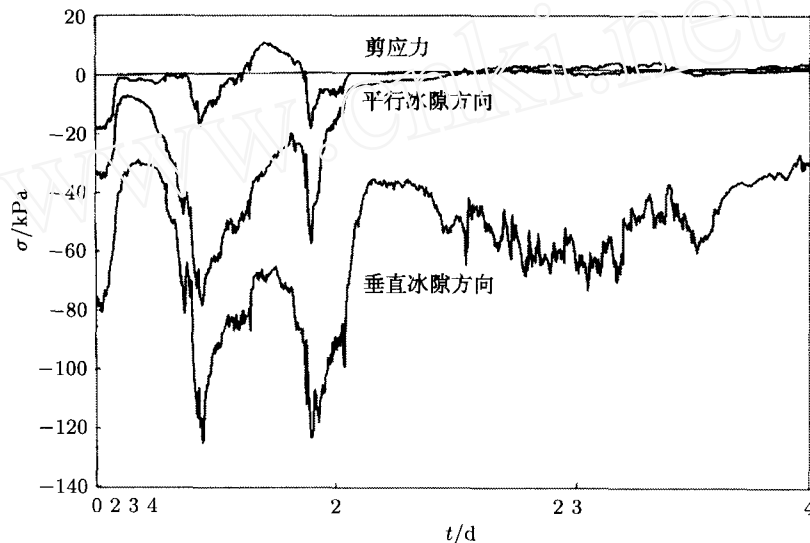


图 7 实测的平行和垂直冰隙方向正应力及剪应力的变化曲线^[31]

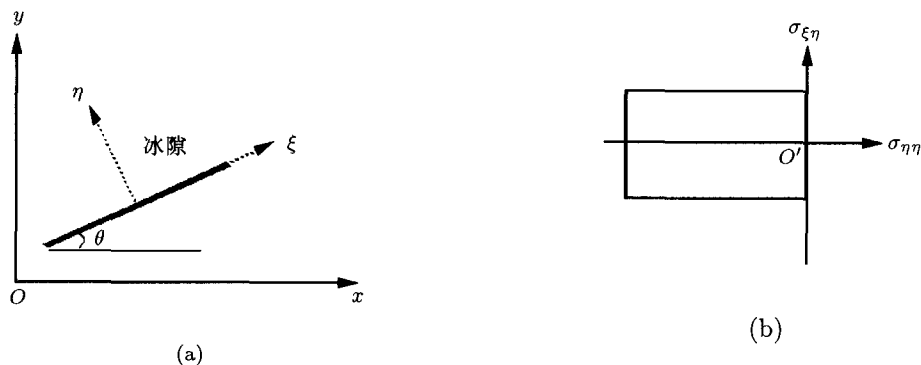


图 8 冰隙方位的局部坐标及其屈服面

4.2 海冰各向异性损伤模型

大面积海冰在风、浪和海流等环境条件下所产生的具有一定长度的断裂、重叠和堆积区域，可视为具有方位特性的海冰损伤（或裂缝）。这种大尺度下的海冰各向异性力学行为与室内模型实验中冰内裂纹的产生和扩展有很强的相似性^[29,53]。Hibler 等人^[29,30]在极区大尺度海冰现场观测和室内模型实验的基础上，发展了考虑定向损伤的海冰动力学各向异性模型，用以模拟海冰堆积、断裂的动力过程。

在研究这种因海冰动力破碎所引起的定向损伤时，Hibler 等人^[29,30]将其分为不考虑冰隙宽度和考虑冰隙宽度两种情况，并均采用了 Mohr-Coulomb 准则作为冰隙开裂的判据，如图 9 所示。该模型中引入了制约比率 $r = \sigma_x/\sigma_y$ 和方位角 θ 两个参量，其中 σ_x 和 σ_y 为损伤区外的主应力， θ 为损伤裂缝与 σ_y 的夹角。

当不考虑海冰的损伤宽度时（如图 9(a)），假设损伤面上的最大局部剪应力满足 Mohr-Coulomb 摩擦定律，即 $\tau_c = \mu\sigma + b$ ，这里 μ 为摩擦系数， τ_c 为最大局部剪应力， b 为黏接力。为简化计算，将上式应力单位均一化为 b ，则其写作 $\tau_c = \mu\sigma + 1$ 。如果当比率 $r = \sigma_x/\sigma_y$ 给定，且海冰发生剪切破坏时，外主应力 σ_y 满足以下条件^[30]

$$\sigma_y \frac{(1-r)\sin(2\theta)}{2} = \mu \frac{(1+r)\sigma_y}{2} - \mu \frac{(1-r)\cos(2\theta)\sigma_y}{2} + 1 \quad (23)$$

为确定海冰损伤裂缝的方位角 θ ，可将 σ_y 视为 θ 函数，并通过确定海冰发生定向损伤时的 σ_y 最小值来求解 θ ，即令 $\frac{d\sigma_y}{d\theta} = 0$ ，由此得到

$$\tan(2\theta_c) = \pm \frac{1}{\mu} \quad (24)$$

式中 θ_c 为海冰损伤区的极限方位角。

当考虑海冰损伤区域（或冰隙）存在一定宽度时（如图 9(b)），该损伤区内的薄冰（或碎冰）与损伤区外的厚度（或平整冰）具有不同的力学性质，且损伤区内的主应力与损伤裂缝存在一定的夹角 ϕ 。同样，考虑损伤界面上均一化的 Mohr-Coulomb 摩擦定律和损伤界面上厚冰和薄冰的应力连续条件，可得

$$\sigma_y \frac{(1+r)}{2} - \sigma_y \frac{(1-r)}{2} \cos(2\theta) = \sigma_y \frac{(1-r)}{2} \sin(2\theta) \left[\frac{1 - \mu \cos(2\phi)}{\mu \sin(2\phi)} \right] - \frac{1}{\mu} \quad (25)$$

同样利用确定海冰发生定向损伤时的 σ_y 最小值求解 θ ，并有

$$\tan(2\theta_c) = \pm \frac{1 - \mu \cos(2\phi)}{\mu \sin(2\phi)} \quad (26)$$

由于损伤区内海冰的厚度、强度等条件的不同，夹角 ϕ 也将发生变化。

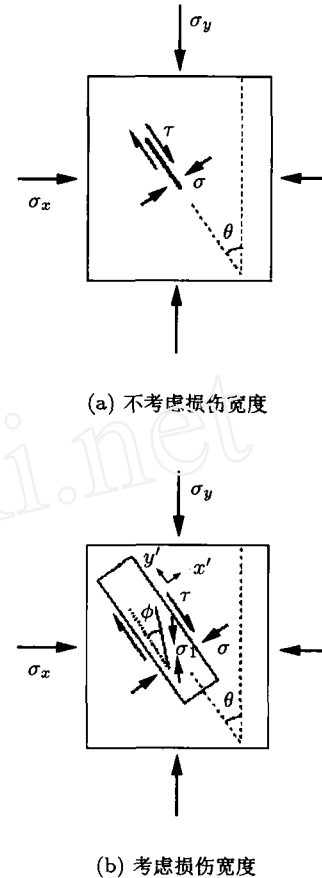


图 9 考虑初始损伤的海冰各向异性模型^[29]

以上单个海冰损伤模型可进一步扩展应用于多个海冰损伤裂缝。考虑海冰应力的连续性条件，并假设每个损伤区域内的海冰应变率均匀，则总应变率可写作

$$\dot{\epsilon}_{ij}^0 = \sum_{k=1}^N A^k \dot{\epsilon}_{ij}^k + A' \dot{\epsilon}'_{ij} \quad (27)$$

式中， $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ 、 $\dot{\epsilon}_{ij}^k$ 和 $\dot{\epsilon}'_{ij}$ 分别为总应变率，第 k 个冰隙的应变率和厚冰应变率； N 为冰隙总数， A^k 和 A' 分别为第 k 个冰隙和厚冰的密集度。根据厚冰与冰隙间的应力连续性，可进一步确定出各冰隙及厚冰的应变率分量^[30]。

采用以上各向异性模型，Hibler^[29,30]对规则区域内冰脊的形成进行了数值试验，初步得出了冰脊的形成过程和分布特性。但由于该模型中没考虑冰隙宽度的具体变化及对冰隙演化的影响，模型中的制约比

率 $r = \sigma_x / \sigma_y$ 也是一个不确定参数, 所以该模型在实际海冰动力学模拟中还存在一定的困难. 因此, 在研究海冰重叠、堆积的各向异性力学行为中, Hibler 也同时发展了各向同性的黏塑性模型.

虽然, 目前海冰动力学的各向异性本构模型仅处于探讨阶段, 尚不能用于海冰实际数值模拟中, 它们的计算稳定性和可靠性也需进一步验证, 但对海冰堆积、重叠的位置和方向进行精确地模拟, 发展各向异性模型是必要的.

5 海冰颗粒流体动力学中的黏弹塑性模型

海冰重叠和堆积过程复杂, 且对冰区结构物有很大威胁, 因此人们一直致力于对它们的研究, 尤其是冰脊的成因、物理力学性质的现场监测及其形成过程的数值模拟工作^[54~62]. 海冰在自然条件下, 大多表现出不连续分布特性, 并在海冰发生断裂、重叠和堆积现象时表现得更为突出. 在大、中尺度下的极区海冰分布中, 海冰卫星遥感资料也能够清晰地反应出海冰分布的区域性^[58,63]. 因此, 为了更真实地反映冰块在生消、运移过程中的相互撞击、破碎以及重叠等不连续力学行为, 海冰动力学的颗粒流模型被建立和完善起来. 在海冰的颗粒流模型中, 冰块间的相互作用主要表现为弹力、黏力以及冰块间的滑动摩擦. 颗粒流模型可用于小尺度下冰块间的相互撞击模拟^[23~25,58,64], 还可用于中尺度下冰脊的形成、冰隙的产生以及冰缘区的海冰演化过程^[26~27]. 近年来, 考虑海冰单元间因冻结而产生的粘接作用, 它又被应用于极区大尺度下的海冰动力过程模拟^[28,59,65]. 不同尺度下的海冰颗粒流模拟结果通过了室内模型实验或现场观测资料的验证^[26~28,64~67].

Hopkins^[27] 在处理冰块间的相互作用时, 采用了黏性、弹性和塑性模型来描述挤压破坏、摩擦、屈曲和弯曲破坏等力学过程, 并假定离散冰块间不存在拉应力. 冰块碰撞的垂直方向力学模型如图 10 所示, 其中 k_{ne} 为有效弹性刚度, η 为阻尼系数, k_{np} 为表征海冰塑性强化刚度, $k_r = \sigma_{cti}$, 为海冰压缩破坏的刚度系数. 图 10 中的锯齿模块为表征冰脊过程中不可恢复的塑性变形.

该海冰重叠和堆积的力学模型主要包括小变形时的弹性和黏性、发生冰脊或重叠破坏时的塑性两部分. 当只发生弹性变形时, 冰块间的作用力为^[25]

$$F = k_{ne}x_e + \eta\dot{x}_e \quad (28)$$

其中海冰的有效弹性刚度为

$$k_{ne} = \frac{Et_i}{L} \quad (29)$$

这里 L 为冰块有效尺寸.

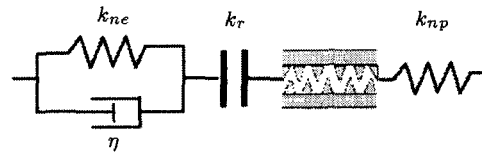


图 10 冰块间垂直方向作用的力学模型^[25]

当发生塑性变形时, 有

$$\dot{x} + \frac{k_{ne}}{\eta}x = \frac{\dot{F}}{k_{np}} + \frac{F}{\eta} \left(1 + \frac{k_{ne}}{k_{np}} \right) - \frac{k_r}{\eta} \frac{k_{ne}}{k_{np}} \quad (30)$$

式中 x_e 为弹性变形, x 为总应变, F 为冰块间作用力

采用以上黏-弹-塑性模型, 并考虑海冰在堆积过程中的能量守恒, Hopkins^[27] 在中尺度 (10 ~ 100) km 下进行了一系列海冰堆积的数值模拟实验, 并对计算区域内海冰应力进行了统计分析. 在不同的初始密集度下 (A 为 97%, 98%, 99% 和 100%), 得到的海冰屈服曲线如图 11 所示. 这里取用的主要计算参数分别为: 压缩强度 $\sigma_c = 2.6$ MPa, 弹性模量 $E = 3.0$ GPa. Hibler^[30] 发现该屈服曲线同其改进的考虑海冰堆积时的黏塑性屈服函数比较接近, 能够很好地反应海冰在堆积过程中的应力状态. 通过室内堆积冰块的剪切实验, Azarnejad 等人^[10] 得出碎冰的摩擦系数为 37°, 当该碎冰经 1 h 冻结后, 其摩擦系数可达 47°.

利用以上黏弹塑性海冰颗粒流体动力学方法, Hopkins^[26] 对冰池内海冰堆积过程的模型实验进行了数值模拟. 该实验是将一规则区域内的碎冰以一定的速率从冰池一端向另一端推动. 在推进过程中对表征冰内应力的平均推力和厚度分布进行测量. 采用以上海冰颗粒流模型, Hopkins 的模拟结果与实验相一致, 即在开始推进阶段, 海冰弹性应力迅速增加, 当海冰发生堆积后, 应力增长率趋近于零, 海冰进入塑性阶段^[25,56,57]. 在海冰与波浪的相互作用研究中, Dai 等人^[68] 采用以上计算方法对室内冰池内的冰块堆积过程进行了数值模拟. 冰块尺寸为 1.0 m, 厚度为 0.167 m. 计算的波浪作用下海冰的堆积高度与实验结果相一致.

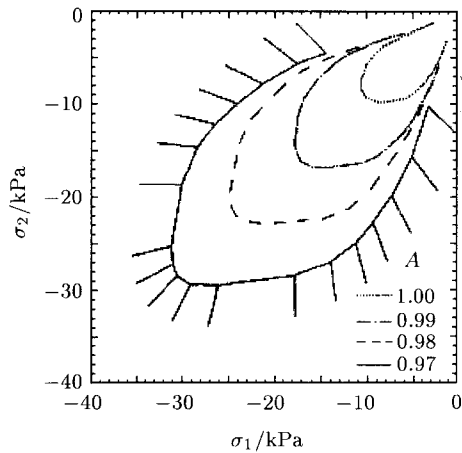


图 11 海冰在不同初始密度下发生堆积时的塑性屈服曲线和应变率矢量 [25]

海冰动力学的颗粒流模型在本构模型和计算方法方面都有异于传统的黏塑性和弹塑性本构模型。颗粒流模型也由最初地用于处理波浪和海冰的相互作用,发展到研究海冰重叠和堆积过程。近年来, Hopkins 又将其进一步发展,并尝试应用于大、中尺度下的海冰动力学的数值模拟。例如, Hopkins 等人 [59] 将 1998 年 1 月 20 日的北极海冰离散为 42 000 个单元,单元大小根据卫星监测资料确定,其平均尺度为 13 km。海冰的重叠、堆积、断裂均可通过海冰单元间的相互作用而得到,其计算结果与实际海冰动力过程吻合。大量的数值试验表明颗粒流模型能够合理地模拟海冰动力学过程中的断裂、重叠和堆积现象,具有物理意义明确、计算精度高的优点 [69]。但由于它以离散的冰块为研究对象,其计算量很大,这在一定程度上限制了它在大、中尺度下海冰动力学模拟中的应用。

6 讨论

在极区及其冰缘区、副极区的海冰数值模拟中,人们针对不同尺度下的海冰动力学特征建立了一系列海冰动力学本构模型。本文将这些模型归为 4 类,即弹塑性、黏塑性、各向异性和颗粒流体动力学中的黏弹塑性模型。

在这 4 类海冰动力学本构模型中,应用范围最广的是 Hibler 的黏塑性模型。它不仅用于极区及其冰缘区的大尺度海冰数值模拟,还用于渤海和 Baltic 海等副极区的中尺度海冰动力学模拟和预测。为适用于不同尺度下的海冰动力学特征,该黏塑性在屈服函数、海内压力项等方面得到了改进和完善。弹塑

性模型是在北极海冰的应力、应变现场测量基础上建立的。由于它在实际海冰模拟和预测中计算过程繁琐,进而限制了它的发展。以上的黏塑性和弹塑性模型均是建立在二维各向同性连续介质理论基础上的。近年来,为精确模拟海冰重叠、堆积和断裂过程中的方位和特征,各向异性本构模型被相继建立起来。但目前它仅限于理论分析和数值试验阶段。近几年,基于黏弹塑性本构模型的冰块间相互作用,颗粒流方法在海冰与波浪相互作用、海冰重叠和堆积的分析中得到了较广泛的应用。但该方法在海冰数值模拟和预测的计算时效还需进一步提高。

通过对以上不同尺度下海冰动力学本构模型的讨论,并结合渤海海冰动力学数值模拟中的具体工作,建议在今后海冰动力学本构模型研究中应重点对以下几个问题深入研究:

(1) 完善海冰动力学的黏-弹-塑性本构模型

将大、中尺度海冰视为连续介质进行中、长期海冰动力学模拟有很高的计算效率。现有黏塑性模型可较好地处理海冰的流变学特征,但由于它不考虑海冰的弹性力学行为,在小应变率和小应变时存在很大的不稳定性。基于现场观测资料建立的弹塑性模型尚未得到实际海冰数值模拟的充分验证,其中的力学参数也需要进一步调整。因此,充分考虑海冰的黏弹性行为、屈服准则和塑性流动法则等,进一步发展和完善黏-弹-塑性本构模型将有助于提高不同海域海冰动力学的模拟精度。

(2) 进一步完善海冰断裂、重叠和堆积的各向异性模型

海冰在发生断裂、重叠和堆积时都有一定的方位,并表现出海冰厚度、强度等参量的非连续性。通过进一步完善各向异性模型,可精确地模拟海冰在发生大尺度连续流变时,在局部区域的非连续和各向异性特征。将大、中尺度下海冰动力学的黏弹塑性统一本构模型与局部海冰重叠和堆积的各向异性模型相结合,可更加精确地进行海冰动力学的数值模拟和预测。

(3) 提高海冰动力学颗粒流模型的计算效率

在海冰的颗粒流体动力学计算中采用的是黏弹塑性本构模型,其计算精度较高,但计算量较大。目前,它主要应用于小尺度下海冰与波浪相互作用、海冰重叠和堆积的数值模拟,尚不能有效地用于大、中尺度海冰的长期数值模拟和预测。改进海冰动力学颗粒流模型的计算方法,简化其中的模型参数是提高计算时效的一个重要途径,从而进一步扩展应用于大、

中尺度海冰动力学模拟。

(4) 海冰动力学中的尺度效应和实验研究

以往海冰动力学本构模型主要是在现场海冰监测和卫星遥感资料的基础上建立的,一般通过数值试验的敏度分析进行验证。针对海冰动力学的模型实验很少,这在很大程度上也影响了海冰动力学本构模型的深入开展。近年来,海冰动力学中的尺度效应引起了人们很大的关注,同时希望通过实验研究进一步完善海冰动力学本构模型,并建立不同尺度本构模型的相互关系。

通过进一步完善海冰动力学中的本构模型,并结合海冰动力学模拟的计算方法,可提高不同尺度下海冰动力学模拟的计算精度和效率。

致谢 感谢美国 Clarkson 大学沈洪道教授、奚海莉教授和大连理工大学吕和祥教授对本文工作的鼓励和指导。

参 考 文 献

- Hibler W D. A dynamic thermodynamic sea ice model. *Journal of Geophysical Oceanography*, 1973, 9: 317~346
- Shen H T, Shen H H, Tsai S M. Dynamic transport of river ice. *Journal of Hydraulic Research*, 1990, 28(6): 659~671
- 吴辉斌, 白珊, 张占海. 海冰动力学过程的数值模拟. *海洋学报*, 1998, 20(2): 1~13
- Kovacs A, Sodhi D S. Shore ice pile-up and ride-up: Field observations, models, theoretical analyses. *Cold Regions Science and Technology*, 1980, 2: 209~288
- Tucker W B, Perovich D K. Stress measurements in drifting pack ice. *Cold Region Science and Technology*, 1992, 20: 119~139
- Lewis J K, Richter-Menge J A. Motion-induced stresses in pack ice. *Journal of Geophysical Research*, 1998, 103(C10): 21831~21843
- Richter-Menge J A, Elder B C. Characteristics of pack ice in the Alaskan Beaufort Sea. *Journal of Geophysical Research*, 1998, 103(C10): 21817~21829
- Hibler W D. Differential sea ice drift II: Comparison of mesoscale strain measurements to linear drift theory predictions. *Journal of Glaciology*, 1974, 13: 457~471
- Lindsay R W, Stern H L. A new Lagrangian model of Arctic sea ice. *Journal of Physical Oceanography*, 2004, 34: 272~283
- Azarnejad A, Brown T G.. Ice rubble behavior in punch tests. *Journal of Cold Regions Engineering*, 2001, 15(3): 135~153
- Golden K M. Critical behavior of transport in sea ice. *Physica B*, 2003, 338: 274~283
- Overland J E, Walter B A, Curtin T B, Turet P. Hierarchy and sea ice mechanics: a case study from the Beaufort Sea. *Journal of Geophysical Research*, 1995, 100: 4559~4571
- Northwest Research Associates, In: Proceedings of the sea ice mechanics and arctic modeling workshop. 1995, Alaska, USA
- Glen J W. Thoughts on a viscous model for sea ice. *AIDJEX Bulletin*, 1970, 2: 18~27
- Coon M D, Maykut S A, Pritchard R S, et al. Modeling the pack ice as an elastic plastic material. *AIDJEX Bulletin*, 1974, 24: 1~105
- Pritchard R S. An elastic-plastic constitutive law for sea ice. *Journal of Applied Mechanics*, 1975, 42: 379~384
- Lepparanta M, Hibler W D. The role of plastic ice interaction in marginal ice zone dynamics. *Journal of Geophysical Research*, 1985, 90(C6): 11899~11909
- Hunke E C, Dukowicz J K. An elastic-viscous-plastic model for sea ice dynamics. *Journal of Physical Oceanography*, 1997, 27: 1849~1867
- Ip C F, Hibler W D, Flato G M. On the effect of the rheology on seasonal sea ice simulations. *Ann Glaciol*, 1991, 15: 17~25
- Flato G M, Hibler W D. Modeling pack ice as a cavitating fluid. *Journal of Physical Oceanography*, 1992, 22: 626~651
- Shen H H, Hibler W D, Lepparanta M. On applying granular flow theory to a deforming broken ice field. *Acta Mechanica*, 1986, 63: 143~160
- Shen H H, Hibler W D, Lepparanta M. The role of floe collisions in sea ice rheology. *Journal of Geophysical Research*, 1987, 92(C10): 7085~7096
- Lu Q M, Larsen J, Tryde P. On the role of ice interaction due to floe collisions in marginal ice zone dynamics. *Journal of Geophysical Research*, 1989, 94: 14525~14537
- Lepparanta M, Lensu M, Lu Q M. Shear flow of sea ice in the marginal ice zone with collision rheology. *Geophysica*, 1990, 25(1-2): 57~74
- Hopkins M A. Four stages of pressure ridging. *Journal of Geophysical Research*, 1998, 103: 21883~21891
- Hopkins M A, Tuhkuri J. Compression of floating ice fields. *Journal of Geophysical Research*, 1999, 104(C7): 15815~15825
- Hopkins M A. On the mesoscale interaction of lead ice and floes. *Journal of Geophysical Research*, 1996, 101(C8): 18315~18326
- Hopkins M A, Frankenstein S, Thorndike A S. Formation of an aggregate scale in arctic sea ice. *Journal of Geophysical Research*, 2004, 109(C01032): 1~10
- Hibler W D, Schulson E M. On modeling the anisotropic failure and flow of flawed sea ice. *Journal of Geophysical Research*, 2000, 105(C7): 17105~17120
- Hibler W D. Sea ice fracturing on the large scale. *Engineering Fracture Mechanics*, 2001, 68: 2013~2043
- Coon M D, Knoke G S, Echert D C, Pritchard R. The architecture of an anisotropic elastic-plastic sea ice mechanics constitutive law. *Journal of Geophysical Research*, 1998, 103(C10): 21915~21925

- 32 Pritchard R S. Ice conditions in an anisotropic sea ice dynamics model. *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, 1998, 8: 9~15
- 33 Dempsey J P, Shen H H. In: IUTAM Symposium on Scaling Laws in Ice Mechanics and Ice Dynamics. 2000, Alaska, U.S.A
- 34 Dempsey J P. Research trends in ice mechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, 37: 131~153
- 35 Zhang Z H. On modeling ice dynamics of semi-enclosed seasonally ice-covered seas. Report Series in Geophysics. Helsinki, 2000
- 36 Pritchard R S. Long-term sea ice dynamics simulations using an elastic-plastic constitutive law. *Journal of Geophysical Research*, 2001, 106(C12): 31333~31343
- 37 Zhang J, Rothrock D. Modeling arctic sea ice with an efficient plastic solution. *Journal of Geophysical Research*, 2000, 105(C2): 3325~3338
- 38 Lepparanta M, Hibler W D. Mesoscale sea ice deformation in marginal ice zone dynamics. *Journal of Geophysical Research*, 1987, 92: 7060~7070
- 39 刘钦政. 用于气候研究的海冰模式: [博士论文]. 青岛: 青岛海洋大学, 1998. 40~50
- 40 Hunke E C. Viscous-plastic sea ice dynamics with the VEF model: linearization issues. *Journal of Computational Physics*, 2001, 190(10): 18~38
- 41 季顺迎, 岳前进, 姚征. 渤海海冰动力学中的黏弹塑性本构模型. *水科学进展*, 2002, 13(5): 599~604
- 42 Lindsay R W, Zhang J, Rothrock D A. Sea ice deformation rates from satellite measurements and in a model. *Atmosphere-ocean*, 2003, 41(1): 35~47
- 43 Wang L R, Ikeda M. A Lagrangian description of sea ice dynamics using the finite element method. *Ocean Modelling*, 2004, 7: 21~38
- 44 Wang Z L. A Coastal sea ice model with discrete parcel method. Clarkson University Internal Report, No. 99-16, 2000. 146
- 45 Hibler W D, Schulson E M. On modeling sea-ice fracture and flow in numerical investigations of climate. *Annals of Glaciology*, 1997, 25: 26~32
- 46 Lu S, Shen H T. Constitutive laws for river ice dynamics. In: Shen, ed. *Ice in Surface Water*. Balkema, Rotterdam. 1998. 109~116
- 47 Liu L, Shen H T. Numerical simulation of river ice control with booms. Report of Cold Regions Research and Engineering Laboratory, ERDC/CRREL TR-00-10, 2000
- 48 Gutfraind R, Savage S B. Marginal ice zone rheology: Comparison of results from continuum-plastic models and discrete-particle simulations. *Journal of Geophysical Research*, 1997, 102(C6): 12647~12661
- 49 Loset S. Discrete element modeling of a broken ice field-Part I: model development. *Cold Regions Science and Technology*, 1994, 22: 339~347
- 50 Bitz C M, Holland M M, Weaver A J, Eby M. Simulating the ice-thickness distribution in a coupled climate model. *Journal of Geophysical Research*, 2001, 106(C2): 2441~2464
- 51 Hunke E C, Zhang Y. A comparison of sea ice dynamics models at high resolution. *Monthly Weather Review*, 1999, 127: 396~408
- 52 Ukita J, Moritz R E. Yield curves and flow rules of pack ice. *Journal of Geophysical Research*, 1995, 100: 4545~4557
- 53 Schulson E M. Compressive shear faults within arctic sea ice: Fracture on scales large and small. *Journal of Geophysical Research*, 2004, 109(C07016): 1~23
- 54 Timco G W, Burden R P. An analysis of the shapes of sea ice ridges. *Cold Regions Science and Technology*, 1977, 25: 65~77
- 55 Richter-Menge J A, McNutt S L, Overland J E, Kwok R. Relating arctic pack ice stress and deformation under winter conditions. *Journal of Geophysical Research*, 2002, 107(C1015): 1~13
- 56 Lepparanta M, Hakala R. The structure and strength of first-year ice ridges in the Baltic Sea. *Cold Regions Science and Technology*, 1992, 20: 295~311
- 57 Flato G M, Hibler W D. Ridging and strength in modeling the thickness distribution of arctic sea ice. *Journal of Geophysical Research*, 1995, 100(C9): 18611~18626
- 58 Hopkins M A, Tuhkuri J, Lensu M. Rafting and riding of thin ice sheets. *Journal of Geophysical Research*, 1999, 104(C6): 13605~13613
- 59 Hopkins M A. A discrete element Lagrangian sea ice model. *International Journal for Computer-Aided Engineering*, 2004, 21(2-3): 409~421
- 60 Heinonen J. Constitutive Modeling of Ice Rubble in First-year Ridge Keel. Finland: VTT Publications, 2004. 536
- 61 Ovsienko S, Lepparanta M, Zatzeps S, Ivchenko A. The use of ice tank experiment results for mesoscale sea ice modeling. In: Proceedings of POAC Conference, 1999
- 62 Tuhkuri J, Lensu M. Laboratory tests on ridging and rafting of ice sheets. *Journal of Geophysical Research*, 2002, 107(C9): 3125~3140
- 63 Overland J E, McNutt S L, Salo S, Groves J, Li S. Arctic sea ice as a granular plastic. *Journal of Geophysical Research*, 1998, 103: 21845~21868
- 64 Hopkins M A. On the ridging of intact lead ice. *Journal of Geophysical Research*, 1994, 99(C8): 16351~16360
- 65 Hopkins M A. The effects of individual ridging events on the thickness distribution in the Arctic ice pack. *Cold Regions Science and Technology*, 1996, 24: 75~82
- 66 Hopkins M A, Hibler W D, Flato G M. On the numerical simulation of the sea ice ridging process. *Journal of Geophysical Research*, 1991, 96(C3): 4809~4820
- 67 Hopkins M A. Onshore ice pile-up: a comparison between experiments and simulations. *Cold Regions Science and Technology*, 1997, 26: 205~214
- 68 Dai M, Shen H H, Hopkins M A, Ackley S F. Wave rafting and the equilibrium pancake ice cover thickness. *Journal of Geophysical Research*, 2004, 109(C07023): 1~9

RESEARCH ADVANCES IN THE STUDY OF CONSTITUTIVE MODELS FOR SEA ICE DYNAMICS*

JI Shunying[†] YUE Qianjin

State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China

Abstract A series of constitutive models have been established for sea ice dynamics under different temporal-spatial scales from the 1970s. In this paper, the existing constitutive models were divided into four groups, that is, elastic-plastic model, viscous-plastic model and its modifications, anisotropic model and viscous-elastic-plastic model of granular flow dynamics. Their characteristics and applications in the sea ice dynamics were discussed. Especially, the viscous-plastic model and its modifications, which were applied widely at large and meso-scales in the polar and sub-polar ice field, were discussed in details. At the end, the key issues in constitutive model for sea ice dynamics were discussed. The viscoelastic-plastic model should be developed to improve the precision of sea ice simulation at large and meso-scales. The granular flow dynamics with viscous-elastic-plastic model, which was used at small scale satisfactorily, can be applied widely at large and meso-scales when its computational efficiency is improved. With the aids of indoor physical experiments, the scale law should be investigated further to establish the relationship in the sea ice constitutive model at different scales.

Keywords sea ice dynamics, constitutive model, elastic-plasticity, viscous-plasticity, anisotropic property

* The project supported by the National Nature Science Foundation of China (40206004)

[†] E-mail: jisy@dlut.edu.cn