

辽东湾区域性漂移海冰的 SPH 数值模拟

季顺迎, 岳前进

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116023)

摘要: 在海冰动力过程的数值模拟中引入 SPH 法, 采用 Hibler 的粘塑性海冰本构方程, 并考虑海冰的热力过程, 对辽东湾海域区域性漂移海冰进行了 96 h 数值模拟, 计算结果与海冰的实际演化过程相吻合. 分析表明, 海冰内力对冰速、冰厚和密集度的分布有较大影响, 在区域性海冰数值模拟中应予以考虑.

关键词: 光滑质点法; 拉格朗日坐标系; 区域性漂移海冰; 海冰数值模拟

中图分类号: P731.15 文献标识码: A 文章编号: 1009-640X(2001)04-0008-08

Numerical simulation of local drifting sea ice in Liaodong Bay by smoothed particle hydrodynamics method

Ji Shun-ying, Yue Qian-jin

(Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract: In the numerical simulation of dynamic processes of sea ice, the smoothed particle hydrodynamics (SPH) method is introduced, the Hibler viscous-plastic constitutive law is adopted and thermodynamic processes of sea ice are considered. According to these, numerical simulation lasting 96 hours of the local drifting sea ice in the Liaodong Bay is carried out. The calculated results consist well with actual processes. Analyses show that the internal force has large effects on the velocity, thickness and compactness of sea ice, and can't be ignored in the simulation of local drifting sea ice.

Key words: smoothed particle hydrodynamics; Lagrangian coordinate; local drifting sea ice; sea ice numerical simulation

20 世纪 60 年代以来, 以 Hibler 和 Parkinson 等为代表建立了大、中尺度海冰数值模式, 并成功地应用于极区及近极地的诸多海域^[1,2]. 我国从 20 世纪 80 年代开始进行海冰的数值模拟和预报. 目前, 已应用于渤海海冰业务化预报服务^[3-5].

海冰的数值模拟和预测, 大都采用欧拉坐标系的有限差分法 (Finite Difference Method, 即 FDM), 并取得了较为理想的计算结果. 但是, 由于有限差分法存在与平流项有关的数值扩散和耗散问题, 且直接影响到海冰

收稿日期: 2001-07-27

基金项目: 国家自然科学基金与中海石油渤海公司联合资助项目 (59739170)

作者简介: 季顺迎 (1972 -), 男, 河北武邑人, 讲师, 博士, 主要从事渤海海冰数值模拟及其工程应用研究.

数值模拟结果的精度.于是,人们不断探索新的海冰数值计算方法,以便更加准确地模拟海冰的动力特性.例如,Pritchard 等^[6]用拉格朗日坐标下的自适应网格法,跟踪冰缘线的运动;沈洪道^[7,8]等基于光滑质点流体动力学(Smoothed Particle Hydrodynamics,即 SPH),提出了拉格朗日坐标下的离散单元法(Discrete Parcel Method,即 DPM),用于研究 Niagara 河上游冰的动力特性,并初步应用于渤海海冰;此外,Flato^[9,10]等将质点网格法(Particle-in-cell,即 PIC)引入到海冰数值模拟中,该法能够处理扭曲比较严重的二维流体力学问题,且具有计算多种物质和自由运动的能力;Gutfraind^[11]等用离散元法(Discrete-element Method,即 DEM)对楔状河道中的碎冰输运进行了数值模拟,并取得了较为理想的计算结果.

由于气象和水文条件的影响,渤海海冰具有与极区及其边缘海冰区截然不同的特性,尤其是在辽东湾北岸,由于水浅、盐度低,较易形成厚冰,且堆积、重叠现象严重,大面积沿岸厚冰在强烈潮汐的作用下产生断裂,并在冬季偏北风作用下向离岸方向的深水区漂移,形成区域性漂移海冰.区域性的漂移海冰会严重影响海上施工、生产和作业.因此,进行区域性漂移海冰,尤其是灾害性厚冰的准确模拟和预测显得非常必要.

由于区域性漂移海冰流动性大,且多为不规则的开边界,进行数值模拟时不宜采用有限差分法.本文基于 SPH 的思路,以 1999 年 2 月 8 日 6:00 至 2 月 12 日 6:00 间辽东湾 JZ20-2 和 JZ9-3 之间的一个区域性漂移厚冰区的演化过程为例,进行了 96 h 的海冰数值模拟.

1 海冰数值模拟的基本方程

1.1 海冰热力方程

海冰数值模拟中的热力模型以热力平衡为基础.热力因素主要包括冰盖上表面的太阳辐射、长波辐射、感热和潜热,冰盖内部的热传导以及冰盖下表面的海洋热能量.冰内的热传导方程为

$$\rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K_i \frac{\partial T_i}{\partial z} + (1 - \alpha_i) Q_{se} - \rho_i \exp(-\mu_i z) \right] \quad (1)$$

式中: $\rho_i c_i$ 和 $S_i(z)$ 分别为海冰的密度、比热和热传导系数, T_i 为冰温, α_i 和 μ_i 为经验常数, $S_i(z)$ 为冰内深度 z 处的盐度; α_i 为冰面对太阳辐射的反射率; Q_{se} 为冰面有效太阳辐射量; μ_i 为冰面的透射率; μ_i 为海冰对太阳辐射的衰减系数.

在海冰上表面,当表面冰温 $T_s > T_m$ (T_m 为海冰融点) 时,冰盖表层热量收支总和 $Q_s > 0$,冰盖吸收热量,使表面冰融化;冰盖下表面的能量主要来自太阳辐射透射量、冰内传热和海洋热通量.综合考虑冰盖上、下表面的质量变化,冰厚增长率为

$$\frac{dh_i}{dt} = \left(\frac{dh_i}{dt} \right)_s + \left(\frac{dh_i}{dt} \right)_b$$

其中:冰盖上表面厚度增长率

$$\left(\frac{dh_i}{dt} \right)_s = \begin{cases} -Q_s / L_i, & T_s > T_m \\ 0, & T_s \leq T_m; \end{cases}$$

冰盖下表面厚度增长率

$$\left(\frac{dh_i}{dt} \right)_b = \frac{\left[K_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial z} \right)_b - F_w - S_b \right]}{\rho_i L_i};$$

h_i 为冰厚; L_i 为海冰的融解潜热; F_w 为冰下的海洋热通量; S_b 为冰盖下表面的太阳辐射透射量.

1.2 海冰动力方程

按牛顿定律描述海冰漂移的动力方程.单位面积海冰的运动方程为

$$M \frac{dV_i}{dt} = -M \rho_w \nabla \cdot \bar{h} + \rho_w \nabla \cdot \bar{h} - Mg \nabla \cdot \bar{h} + \nabla \cdot (\bar{h} \bar{\tau}) \quad (2)$$

式中:单位面积海冰质量 $M = \rho_i \bar{h}$, ρ_i 和 \bar{h} 分别为海冰密度和平均冰厚,且 $\bar{h} = A h_i$, A 为海冰密度集; V_i 为海

冰速度矢量;科氏参数 $f = 2 \omega_e \sin \phi$, ω_e 为地球转角速度, ϕ 为地理纬度; K 为与海面垂直向上的单位矢量; a 和 w 分别为风和流对海冰的拖曳力; g 为重力加速度; w 为海面的动力高度(指相对于平均海平面的海面高度变化); σ 为冰内应力张量.

1.3 海冰本构方程

海冰数值模拟中,海冰本构方程大都建立在连续介质力学的基础上,并将海冰视为二维连续体. 根据 Hibler^[1]的粘塑性本构方程,海冰应力-应变关系为

$$\sigma_{ij} = 2 \eta \dot{\epsilon}_{ij} + (\eta - \eta_0) \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} - \frac{P \delta_{ij}}{2}, \quad (i, j = 1, 2) \tag{3}$$

式中: σ_{ij} 和 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 分别为二维应力和应变速率张量, 且 $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$; 正应变速率 $\dot{\epsilon}_{kk} = \dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}$; δ_{ij} 为 Kronecker 算子; η 和 η_0 分别为非线性块体粘性系数和切变粘性系数, 且 $\eta = (\dot{\epsilon}_{ij}, P) = \min(P/2, 0)$, $\eta_0 = 2.5 \times 10^8 P$, $\eta = (\dot{\epsilon}_{ij}, P) = \eta_0 / e^2$, 其中 $e = \sqrt{\dot{\epsilon}_{11}^2 + \dot{\epsilon}_{22}^2}$, 且 $\dot{\epsilon}_{11} = \dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}$, $\dot{\epsilon}_{22} = \sqrt{(\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22})^2 + 4 \dot{\epsilon}_{12}^2}$; 冰内静水压力项

$$P = P_0 \exp[-C(1 - A)]$$

其中: P_0 和 C 为经验常数(本文取 $P_0 = 1.0 \times 10^4 \text{N/m}^2$, $C = 20.0$).

2 海冰数值模拟的 SPH 方法

Gingold 和 Monaghan^[12]等在研究天体物理流体动力学中建立了 SPH 法. 近年来,在河冰和海冰数值模拟等诸多领域中得到了广泛应用^[13~16]. 该法是将一个连续体分解成多个质点,且每个质点都具有质量、动量和能量. 用足够多的质点来准确表示连续体的运动.

在 SPH 计算中,函数 $f(r)$ 可通过对计算域内的积分来近似表示^[13~15]为

$$f(r) = \int W(r - r', h_0) f(r') dr' \tag{4}$$

式中: r 和 r' 均为位置矢量; h_0 为光滑长度,它是决定核影响范围的长度尺度,且当 $h_0 \rightarrow 0$ 时, $f(r) \rightarrow f(r)$; $W(r - r', h_0)$ 为核估计函数,且有如下性质:

$$\int W(r, h_0) dr = 1$$

核估计函数一般采用具有良好连续性和插值精度的二维 Gauss 函数,其空间分布见图 1.

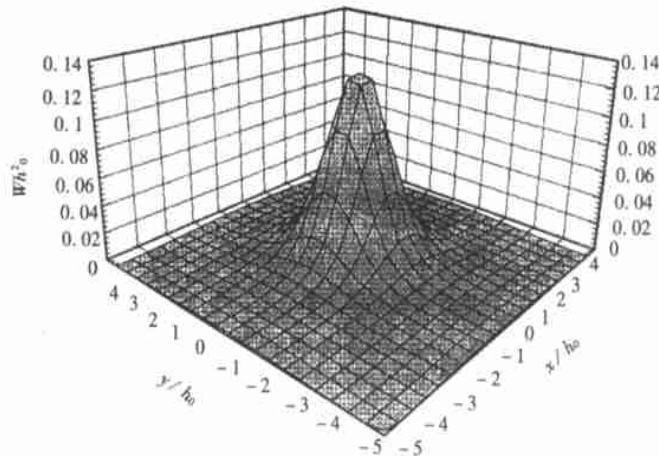


图 1 二维高斯分布示意图

Fig. 1 Sketch of the Gauss distribution in two dimensions

二维 Gauss 函数可表述为

$$W(\mathbf{r} - \mathbf{r}, h_0) = \frac{1}{h_0^2} \odot \exp \left[- \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r})^2}{h_0^2} \right]$$

如果在计算域内 $f(\mathbf{r})$ 为未知, 则不能利用 (4) 式直接计算 $f(\mathbf{r})$. 但在一系列任意分布的点 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ 处, f 值为已知时, 则有

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{f_j}{n_j} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h_0) \quad (5)$$

式中: n_j 为 \mathbf{r}_j 处的质点数密度, 即单位面积内的质点数, 且 $n_j = M_j / m_j$, M_j 和 m_j 分别为第 j 个质点的质量密度和质量; 这里, 记 $f_j = f(\mathbf{r}_j)$, $n_j = n(\mathbf{r}_j)$, $m_j = m(\mathbf{r}_j)$, $M_j = M(\mathbf{r}_j)$; \mathbf{r} 处质点的质量密度估计量

$$\tilde{M}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N m_j W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h_0)$$

$$\tilde{M}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \sum_{j=1}^N m_j$$

于是, (5) 式又可表示为

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{M_j} \odot f_j \odot W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h_0) \quad (6)$$

参照 (6) 式, $\nabla f(\mathbf{r})$ 的估计值为

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h_0) \nabla f(\mathbf{r}_j) \quad (7)$$

对 (7) 式进行分部积分, 并考虑在积分边界处函数 $W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h_0)$ 的值趋近于零, 于是, (7) 式可转化为

$$\nabla f(\mathbf{r}) = - \sum_{j=1}^N f_j \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h_0) \quad (8)$$

将 (8) 式离散化, 得

$$\nabla f(\mathbf{r}) = - \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{M_j} f_j \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h_0) \quad (9)$$

在计算区域内, 由于各离散质点的疏密不同, 且质点位置随时间不断变化, 因此, 在计算过程中应调整各质点的光滑长度, 以得到较精确的计算值. 本文计算中, 若质点的初始光滑长度为 h_0 , 则第 n 时间步长的光滑长度

$$h^n = h_0 \left[\frac{M^0}{M^n} \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{t}{2} (\nabla \cdot \mathbf{V}_i)^{n-1} \right] \quad (10)$$

式中: M^0 和 M^n 分别为质点的初始和第 n 时间步长的质量密度.

从理论上讲, 搜索区域 (或称计算区域) 越大, 计算结果越精确. 但若搜索区域太大, 则将花费过多的计算时间; 而当搜索区域太小时, 将降低计算结果的精度. 一般搜索区域为 $4h_0 \times 4h_0$ 时, 即 5×5 个质点, 计算精度便可达 99% 以上. 此外, 在进行质点搜索时, 不同的搜索方式所占用的时间不同. 本文计算采用逐点搜索.

利用 SPH 法处理海冰动力方程. 在拉格朗日坐标系下的海冰动力方程为

$$\frac{d\mathbf{V}_i}{dt} = - f \odot \mathbf{K} \times \mathbf{V}_i - g \nabla_w + \frac{\mathbf{a} + \mathbf{w}}{M} + \frac{\nabla \cdot (\bar{h})}{M} \quad (11)$$

式中的海冰内力项为

$$\frac{\nabla \cdot (\bar{h})}{M} = \nabla \cdot \left(\frac{\bar{h}}{M} \right) + \frac{\bar{h}}{M^2} \nabla M \quad (12)$$

对于第 k 个质点, 其位置矢量为 \mathbf{r}_k , 质量和质量密度分别为 m_k 和 M_k , 其平均冰厚为 \bar{h}_k , 应力张量为 \mathbf{k} . 根据 (9) 式, (12) 式又可写为

$$\frac{\nabla \cdot (\bar{h}_k \odot \mathbf{k})}{M_k} = \sum_{j=1}^N m_j \left[\frac{\bar{h}_j \odot \mathbf{k}_j}{M_j^2} + \frac{\bar{h}_k \odot \mathbf{k}_k}{M_k^2} \right] \nabla W_{kj} \quad (13)$$

式中: $W_{kj} = W(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j, h_0)$.

将 (13) 式代入 (11) 式, 得到第 k 个质点在 x, y 方向上的动量平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_{ik}}{\partial t} &= fV_{ik} - g \frac{\partial w}{\partial x_k} + \frac{ax_k + wx_k}{M_k} + \sum_{j=1}^N m_j \left[\left(\frac{\bar{h}_j \odot_{xxj}}{M_j^2} + \frac{\bar{h}_k \odot_{xxk}}{M_k^2} \right) \frac{\partial W_{kj}}{\partial x_k} + \left(\frac{\bar{h}_j \odot_{xyj}}{M_j^2} + \frac{\bar{h}_k \odot_{xyk}}{M_k^2} \right) \frac{\partial W_{kj}}{\partial y_k} \right] \\ \frac{\partial V_{ik}}{\partial t} &= -fU_{ik} - g \frac{\partial w}{\partial y_k} + \frac{ay_k + wy_k}{M_k} + \sum_{j=1}^N m_j \left[\left(\frac{\bar{h}_j \odot_{yyj}}{M_j^2} + \frac{\bar{h}_k \odot_{yyk}}{M_k^2} \right) \frac{\partial W_{kj}}{\partial y_k} + \left(\frac{\bar{h}_j \odot_{yxj}}{M_j^2} + \frac{\bar{h}_k \odot_{yxk}}{M_k^2} \right) \frac{\partial W_{kj}}{\partial x_k} \right] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中： U_{ik} 和 V_{ik} 分别为第 k 个海冰质点在 x 和 y 方向上的速度分量； a_x 、 a_y 、 w_x 、 w_y 分别为风和流对单位面积海冰在 x 和 y 方向上的拖曳力。根据Hibler的粘塑性本构模型，用(3)式计算海冰应力，其中的应变速率在SPH法中表示为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{xxj} &= \frac{1}{M_j} \sum_{n=0}^N m_n (U_{ij} - U_{in}) \frac{\partial W_{in}}{\partial x_j} \\ \dot{\epsilon}_{yyj} &= \frac{1}{M_j} \sum_{n=0}^N m_n (V_{ij} - V_{in}) \frac{\partial W_{in}}{\partial y_j} \\ \dot{\epsilon}_{xyj} &= \frac{1}{2M_j} \left[\sum_{n=0}^N m_n (V_{ij} - V_{in}) \frac{\partial W_{in}}{\partial x_j} + \sum_{n=0}^N m_n (U_{ij} - U_{in}) \frac{\partial W_{in}}{\partial y_j} \right] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

为保证计算的收敛性，根据Courant-Friedrichs-Lewy稳定性条件^[14]，本文取初始光滑长度为0.02°(地理经纬度)，海冰动力方程计算的时间步长为60s，而热力方程的计算时间步长为600s。

3 海冰数值模拟结果及验证

3.1 初始条件

1999年2月8~10日，利用平台定点观测、破冰船调查和卫星遥感对辽东湾JZ20-2和JZ9-3之间的油气开发区间的冰情进行了全方位监测。从2月8日6:00的NOAA卫星遥感图像中发现，在(121.75°E, 40.69°N)到(121.89°E, 40.55°N)之间有一平均厚度达35cm的重叠冰区(见图2)，面积为100km²左右，其周围海域为10cm以下的薄冰，而这一冰厚区正是JZ9-3油田的施工作业区；为进一步观测冰的类型、密集度和详细范围，从2月8日9:30到2月10日9:30利用破冰船进行了48h连续跟踪监测。此外，JZ20-2平台的海冰定点观测站同步观测的2月8日6:00到2月12日6:00间96h的气温和风速变化见图3。

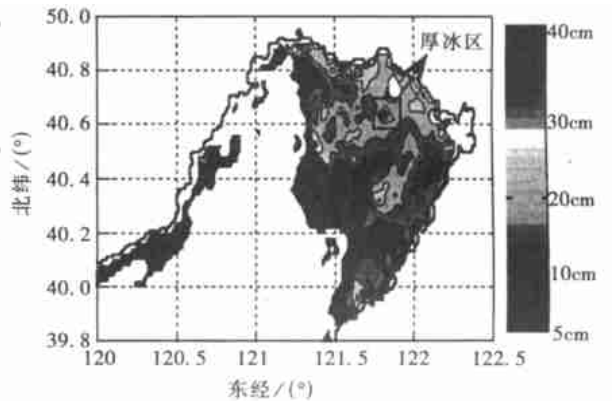


图2 NOAA卫星遥感的辽东湾初始冰厚分布
Fig. 2 Initial distribution of the sea ice thickness in the Liaodong Bay remotely sensed by NOAA Satellite

综合以上海冰监测信息发现：该漂移厚冰区的南侧和北侧冰缘线随潮流分别在JZ20-2海域和JZ9-3海域往复运动，并逐渐向南侧海域漂移，大部分海冰于2月11日17:00移至JZ20-2平台以南，并有部分消融。

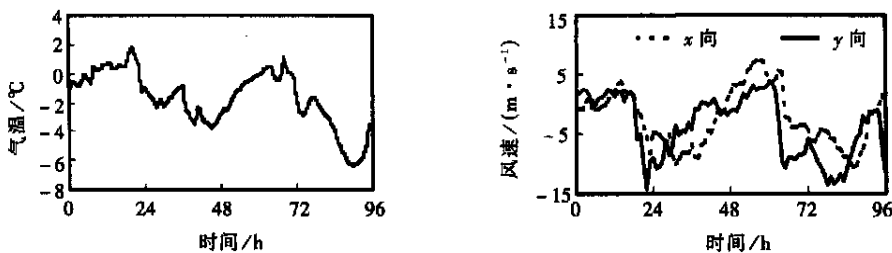


图3 实测的气温和风速
Fig. 3 Measured air temperature and wind speed

3.2 模拟结果

用破冰船和 JZ20 - 2 海冰定点观测资料对由 NOAA 卫星遥感数字信息获得的初始冰情厚度和密集度分布进行部分校正. 初始网格尺度为 $0.02^\circ \times 0.02^\circ$, 将 JZ9 - 3 海域的漂移厚冰区分为 $7 \times 7 = 49$ 个网格质点, 时间步长为 60 s, 采用热力 - 动力模型和 Hibler 的粘塑性本构方程进行模拟. 流速采用渤海潮流的计算值, 并对非标准网格点进行差值处理. 从 1999 年 2 月 8 日 6:00 开始进行了 96 h 数值模拟, 海冰的厚度和密集度演化过程见图 4.

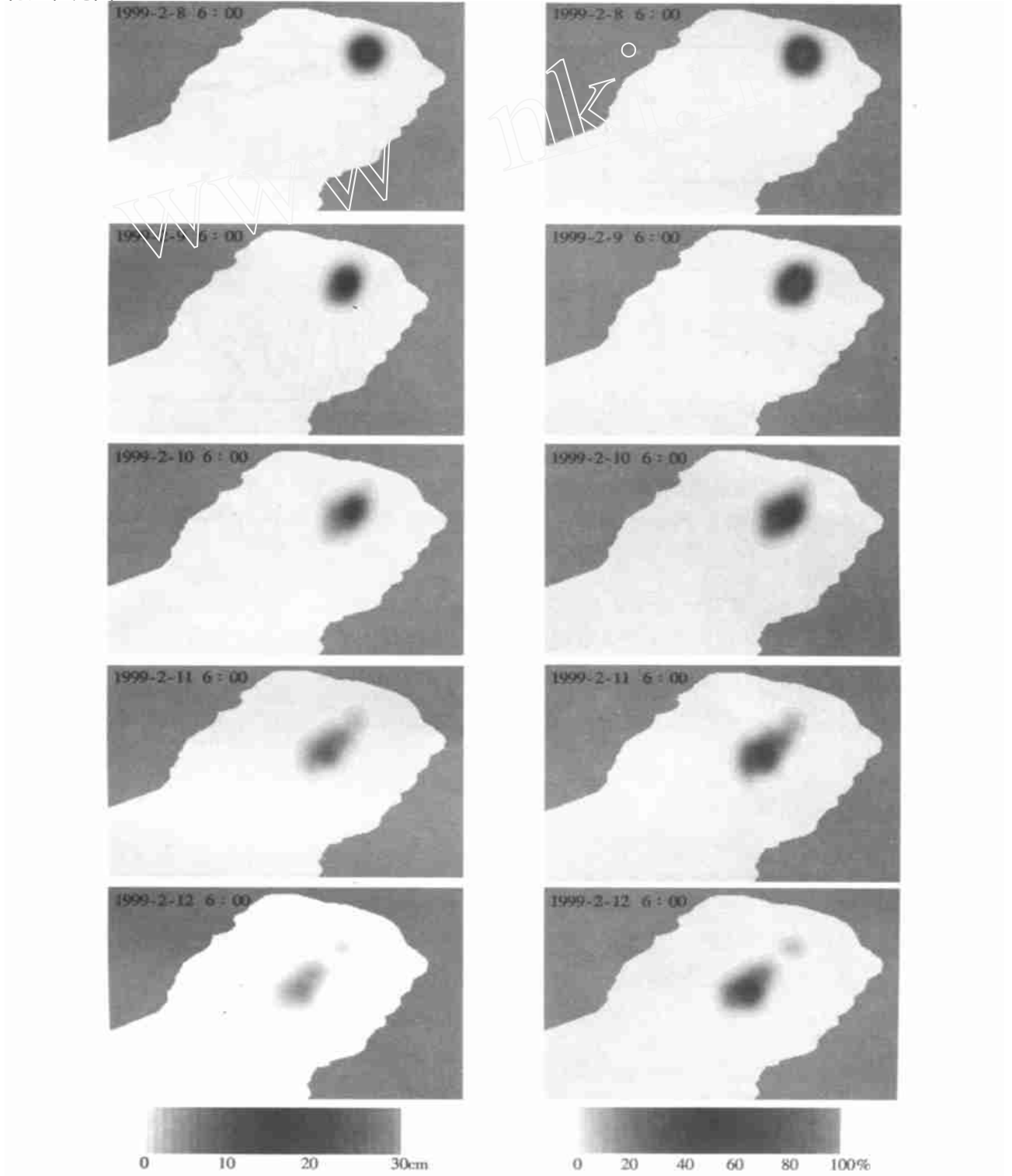


图 4 辽东湾区域性漂移海冰的厚度(左列)及密集度(右列)演化过程

Fig. 4 Evolution process of the thickness(left) and compactness(right) of the local drifting ice in the Liaodong Bay

从漂移厚冰区的演化过程来看,在风、流等动力因素的作用下,厚冰区在向南部深水区不断移动;在热力因素影响下,冰厚和密集度也不断减小.该冰区的平均冰厚和平均密集度的衰减过程见图5(a)和图5(b).可见,该漂移冰区在演化过程中存在辐散,即海冰的覆盖面积不断增加,为原来的1.5倍左右(见图5(c)).此外,海冰的平均漂移速度表明,海冰在潮流控制下往复漂移(见图5(d)).海冰的平均漂移轨迹表明,在风的作用下该厚冰区有向西南漂移的趋势,该冰区的厚度、密集度、冰速和漂移轨迹的模拟结果与破冰船海冰调查结果相一致.JZ20-2平台周围的模拟结果与该平台上的定点监测结果也较吻合.

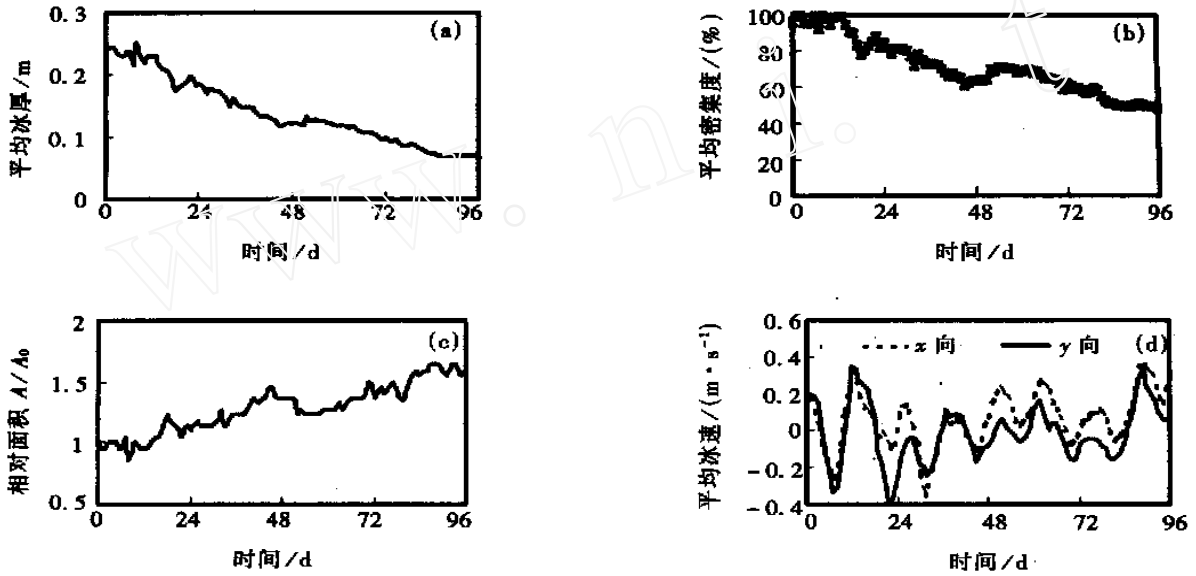


图5 区域性漂移海冰的厚度、密集度、相对面积和冰速的均值变化

Fig. 5 Mean values variation of the thickness, compactness, relative area and velocity of the local drifting ice

3.3 自由漂移海冰的模拟

为了分析海冰内力在局部漂移海冰演化过程中的作用,在忽略海冰内力的情况下,利用海冰自由漂移模型对该漂移冰区进行数值模拟(见图6),并与考虑海冰内力作用时的模拟结果进行对比.

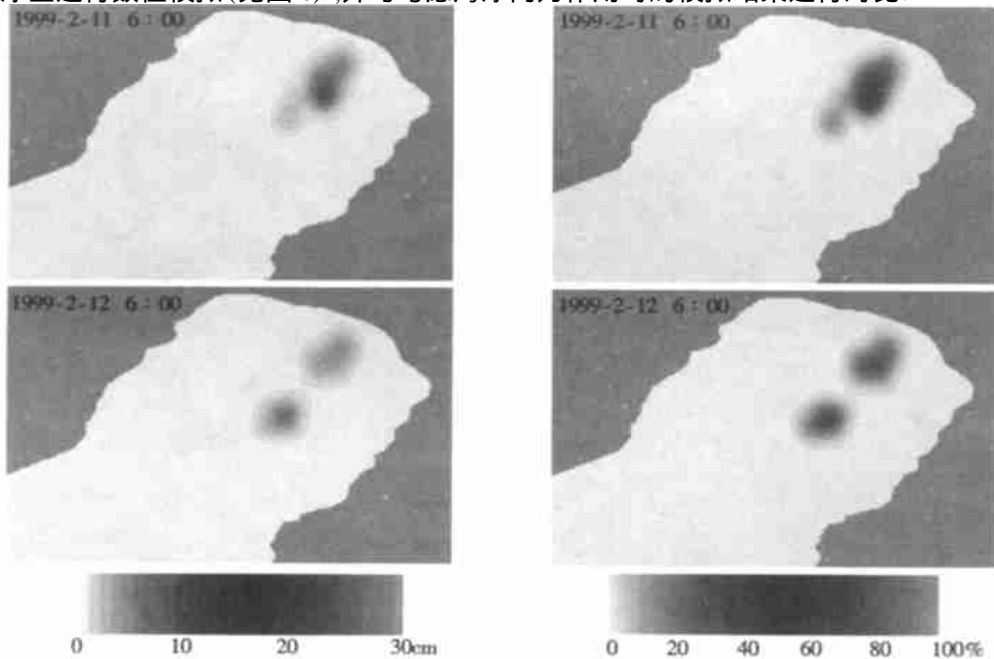


图6 自由漂移模型下区域性海冰的厚度(左列)及密集度(右列)演化过程

Fig. 6 Evolution process of the thickness(left) and compactness(right) of the local ice using free drifting model

考虑海冰内力时,冰区内的速度分布较均匀,这是由于海冰内力有协调相互运动的作用.自由漂移条件下,海冰厚度和密集度的模拟结果与同考虑海冰内力时的计算结果(参见图4)有一定的差异,其辐散效果要大于考虑海冰内力时的模拟结果.因此,在进行局部漂移海冰数值模拟时应考虑海冰内力的作用.

4 结 语

基于光滑质点流体动力学的基本思路,在拉格朗日坐标系下对辽东湾的一区域性漂移海冰进行了数值模拟,采用Hibler的粘塑性海冰本构方程,并考虑了海冰的动力和热力过程.计算结果表明,SPH法对模拟区域不规则漂移海冰的演化过程有较强的适应性.此外,海冰内力对冰速、冰厚和密集度的分布有较大影响,在区域性海冰数值模拟中应予以考虑.SP法可较好地解决数值扩散问题,对冰缘线有较高的计算精度,故较适用于区域性漂移海冰的数值模拟和预测.

参 考 文 献

- [1] Hibler W D. A dynamic and thermodynamic sea ice model[J]. *Journal of physical Oceanography*, 1979, 9:815 - 846.
- [2] Parkinson CL, Washington W M. A large-scale numerical model of sea ice[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1979, 84:311 - 337.
- [3] 王仁树. 渤海海冰的数值试验[J]. *海洋学报*, 1984, 6(4):572 - 580.
- [4] 吴辉碇. 海冰的动力-热力过程的数学处理[J]. *海洋与湖沼*, 1991, 20(2):321 - 327.
- [5] 白珊,吴辉碇. 渤海的海冰数值预报[J]. *气象学报*, 1998, 56(2):139 - 151.
- [6] Pritchard R S, Mueller A C, Hanzlik D J, et al. Forecasting Bering Sea ice edge behavior[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1990, 95:775 - 788.
- [7] Shen H T, Chen Y C, Wake A, et al. Lagrangian discrete parcel simulation of river ice dynamics[J]. *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, 1997, 3(4):328 - 332.
- [8] 沈洪道. 冰动力学的拉格朗日离散元模式[J]. *海洋预报*, 1999, 16(3):71 - 84.
- [9] Flato G M. A particle-in-cell sea-ice model[J]. *Atmos Ocean*, 1993, 31(3):339 - 358.
- [10] Huang Z J, Savage S B. Particle-in-cell and finite difference approaches for the study of marginal ice zone problems[J]. *Cold Regions Science and Technology*, 1998, 28:1-28.
- [11] Gutfraind R, Savage S B. Flow of fractured ice through wedge shaped channels: smoothed particle hydrodynamics and discrete element simulations[J]. *Mechanics of Materials*, 1998, 29:1 - 17.
- [12] Gingold R A, Monaghan J J. Smoothed Particle Hydrodynamics: theory and application to Non Spherical stars[J]. *Mon Not R Astr Soc*, 1977, 181:375 - 389.
- [13] Monaghan J J. Particle method for Hydrodynamics[J]. *Computer Physics Report*, 1985, 3:71 - 124.
- [14] Gutfraind R, Savage S B. Smoothed Particle Hydrodynamics for the simulation of broken ice fields: Mohr-Coulomb Type rheology and frictional boundary conditions[J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, 134:203 - 215.
- [15] Libersky L D, Petschek A G, Carney T C, et al. High strain Lagrangian Hydrodynamics[J]. *Journal of Computational Physics*, 1993, 109:67 - 75.
- [16] Monaghan J J. Simulating free surface flows with SPH[J]. *Journal Computational Physics*, 1994, 110:399 - 406.